

Rerum Naturalium Fragmenta No. 273

*Jaskó Tamás: Adalékok a
csigaházak geometriájához*

Budapest
1971

.

Rerum Naturalium Fragmenta

Jaskó Sándor szerkesztése:

Budapest XII., Pethényi köz 4

Adalékok a csigaházak geometriájához

írta: Jaskó Tamás

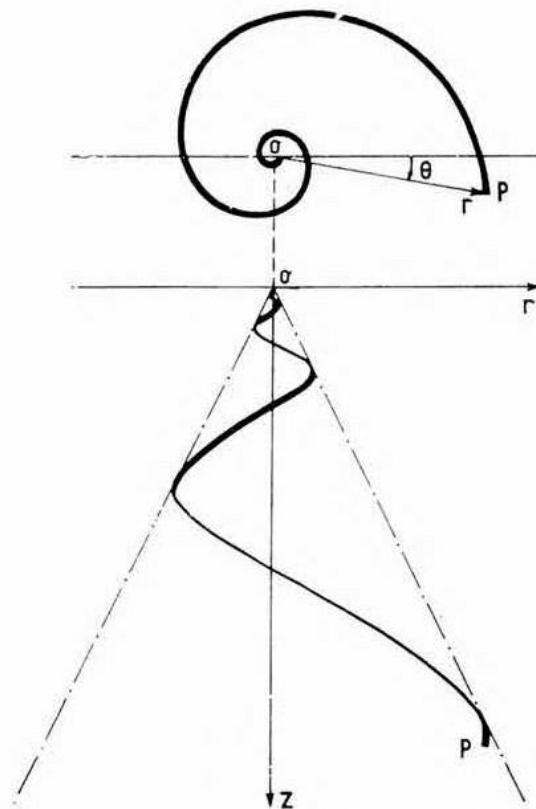
A XIX. század közepén két kutató, az angol Moseley és a német Naumann egymástól függetlenül csaknem egyszerre jutott arra a gondolatra, hogy a puhatestűek vázalkotásában geometriai törvényszerűséget keressen. Számos példány mérésével bizonyították, hogy a csigák és lábasfejűek kanyarulatai logaritmikus spirális alakúak (Moseley, H. 1838, Naumann, C. F. 1845).

Ez azonban csak újra-felfedezés volt. A dolog lényegét ugyanis már 1659 előtt felismerte Christopher Wrenn, mint azt Wallis, J. 1659-ben megjelent könyvében leírja: (a logaritmikus spirálist) „megfigyelte a mi Wrenniusunk [...] annak segítségével a kagyló és csiga héjakat is méri. Megbecsüli, különösen nagy valószínűséggel, hogy e héjak nem mások, mint betekeredett piramisok (= kúpok) amelyek tengelye ily módon spirális; mégpedig nem fekvő síkban, hanem fokozatosan emelkedve (egyenesen álló tengely körül).”

Ez annál is meglepőbb, mert magát a logaritmikus spirálist csak nem sokkal előbb, 1638-ban fedezte fel Descartes, s a Wrenn által tanulmányozott kúposan csavarodó változatot Grandi később újra felfedezte a matematika számára (Grandi, G. 1701).

Nemcsak ez a korai eredmény, de mások ilyen irányú felismerései is feledésbe merültek (pl. Leslie, J. (1822) is felismerte a Nautilus logaritmikus spirális alakját). A paleontológusok érdeklődése csak századunkban, Thompson úttörő jellegű művének megjelenése után fordult a téma felé. E nagy sikerű mű 1917 óta már 5 újranyomást ért meg, s mintegy 150 oldalon

foglalkozik a logaritmikus spirális előfordulásával az élővilágban (Thompson, D' A. W. 1963).



1. ábra. A logaritmikus spirális elhelyezkedése az r, z, Θ koordináta-rendszerben

A logaritmikus spirális néhány fontos tulajdonsága:

1. A spirális kezdőpontjából (pólus) húzott sugár arányos a szögelfordulással.

Vagyis a görbe egyenlete poláris koordinátákkal (1. ábra):

$$\Theta = k \log r \quad (1)$$

2. A (kúpos) logaritmikus spirális az egyetlen olyan görbe, amely egy pontból kiindulva (mindig csak egyik végén) növekedve önmagához állandóan hasonló marad.

3. A spirális végtelen sokszor kanyarodik körbe a pólus körül. Ennek ellenére a pólustól számított ívhossz véges, arányos a sugárral.

4. A pólusból vont sugár állandó szöget zár be az érintővel. (Ezek és hasonló tulajdonságai teszik a görbét könnyen mérhetővé.)

A váz geometriai szempontból egy tengely körül felcsavart kúp-ként tekinthető. Az analógia pontosabbá téve: Képzeljünk el egy zárt görbét (nevezzük ezt vezérvonalnak). Mozgassuk most ezt egy egyenes tengely mentén úgy, hogy közben a görbét az egyenes egy pontjától (pólus) számított elmozdulással arányosan nagyítjuk. A kapott felület egy kúpfelület lesz, melynek csúcsa a pólus. Ha viszont e mozgás közben a vezérvonalat még forgatjuk is a tengely körül (a szögelfordulás legyen arányos az eltolás logaritmusával), „feltekert kúpot”, csigaház formát kapunk (helicoconus).

A csigaház alak tehát két görbeseregként szemlélhető: transzverzális görbék (vezérvonalak) és longitudinális görbék (spirálisok) együtteseként. Ezeket a görbéket sok esetben magán a vázon is megfigyelhetjük, láthatóan ugyanazt a vázat többféle vezérvonalból kiindulva is kaphatjuk. Vezérvonal a szájnnyílás = köpenyszegély formája (növekedési vonalak), kamra-varratvonalak, haránt díszítmények, vagy akár a kanyarulat keresztmetszete, vagyis minden olyan alakzat, amely metszi az egész kanyarulatot (és önmagához hasonló marad). Spirálisok a hosszanti = spirális díszítmények és a kanyarulatok varratvonalai.

A ház alakjának egyenlete így összetehető a két görbe egyenletéből (vezérvonalra sorakozó spirálisok, ill. megfordítva), pl. leírható úgy, hogy megadjuk a vezérvonal egy pontjának (paraméteres) spirálisát és a spirális egyenletébe a pont (paraméter) helyére a vezérvonal egyenletét helyettesítjük.

Moseley nyomán Raup (1961) a következő megállapításokat teszi a szabályos vázalkotású formákra (lásd alább):

1. „Egyazon egyedben a vezérvonal alakja állandó marad a növekedés folyamán;
2. egyazon egyedben a vezérvonal növekedési tényezője közel állandó;
3. egyazon egyedben a kanyarulatok átfedése is közel konstans;
4. egyazon egyedben állandó arányosság kapcsolja össze a vezérvonal nagyságát és egy adott vezérvonalpontnak a forgástengelytől való távolságát.”

Vezérvonalnak a keresztmetszetet választva, a következő egyenleteket kapja a ház egy általános pontjára a z , r , Θ hengeres koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} r &= r_0 W^{(\Theta/2\pi)} \\ z &= z_0 W^{(\Theta/2\pi)} + r_0 T(W^{(\Theta/2\pi)} - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

ahol W a kanyarulatonkénti növekedési tényező,
 T a z irányú növekedés mértéke az r irányúhoz viszonyítva,
 $P(r_0, z_0, 0) = f(r, z) \mid \Theta = 0$ a vezérvonal pontjainak koordinátái a $\Theta = 0$ síkon (erre utal r_0 és z_0 indexe).

A koordináta-rendszer megválasztásával $z_c = \Theta_c = 0$, s így a pólus (apex), koordinátái:

$$\Theta (0, T, r_c) \tag{3}$$

A (kúpos) logaritmikus spirális három paraméterrel megadható. Mérésére kialakult eljárások vannak, ezek egy része csak teljes példányokra, mások kis töredékekre is alkalmazhatók (Thompson, D'A. W. 1963, Vasicek, Z. 1967).

Az irodalomban közölt eredmények arra mutatnak, hogy a kagylók, csigák, lábasfejűek, Scaphopodák, Brachiopodák többsége, számos Foraminifera és az Ostracodák közül az Estheria-félék alakja csak statisztikus ingadozásokban tér el ettől az alaktól (a kevésbé görbülő alakoknál, mint pl. a Dentalium, csak egy kanyarulatrészlet látható a spirálisból).

Ezek a lények tehát életük folyamán a vázat végig hasonlóan növelik.

Amennyiben a szögelfordulást az idővel arányosnak tekintjük, az azonos időre eső növekmények is hasonlóak és a váz lineáris méretei az idő exponenciális függvényeként nőnek. Várható ezért (a növekedési szabály kiterjesztésével), hogy valamennyi önálló, szabadon növekvő, élettelen külső vázas állat vázalkotása a logaritmikus spirális, vagyis a kúpos csigavonal alakot követi.

Ettől a formától rendszeres eltérés mutatkozik (az említett csoportokon belül) azoknál a „mellékalakoknál”, melyek egyedfejlődésük során hirtelen gyökeresen változtatnak házépítésük módján. Vannak azonban olyan esetek is, amikor a ház alakja fokozatosan változik meg (Pupa-félék stb.), esetleg olyan kis mértékben, hogy rendszeres eltérést csak statisztikai vizsgálatokkal lehet kimutatni. A pólus közelében a váz alakja úgysem

lehet tökéletes spirális, mert nem a pólusból, hanem egy már reális méretű kezdőkamrából indul ki.

Ez a felismerés készítette Naumann-t és Grabau-t arra, hogy egy, a logaritmikus spirálishoz bár közelálló, de annál általánosabb görbét keressenek a csigaház leírására (Naumann, C. F. 1845, Grabau, A. H. 1872). Ma is vitatott, van-e ilyen (Burnaby, T. P. 1966).

Ezzel szemben a vezérvonal (szájnyílás, növekedési vonal, keresztmetszet) alakja sokkal változatosabbnak látszik és csak közelítőleg tekinthető körnek, ellipszisnek, vagy ezek áthatási idomának. A vezérvonal alakjának pontosabb meghatározásához további statisztikai mérések és elméleti fiziológiai megfontolások kellenek. Feltehető, hogy meghatározó tényezői első sorban az izmok elhelyezkedése, a szilárdsági, közeg-ellenállási és stabilitási tulajdonságok.

Ameddig a vezérvonal alakja ilyen kevésbé ismert, addig csak azt szükséges feltételezni, hogy megadható matematikailag, de nem célszerű ellipszisek bonyolult metszési idomaival közelíteni, mint azt Raup, D. M. (1961, 1966) teszi.

Megpróbáltam Raup, D. M. (1966) egyenleteit egyszerűsíteni.

Ha a pólust (apexet) választom origónak a váz egyenletének megadásakor, vagyis a koordináta-rendszer és a váz kezdőpontja egybeesik, az r koordináta megfelel az axiális iránynak, a z tengely (axis) apicalis irányú, Θ növekedési iránya pedig az anterior irány. Így Raup kezdő megállapításai kettővé vonhatók össze:

Egyazon egyedben:

1. a vezérvonal alakja állandó a növekedés folyamán,
2. a vezérvonal növekedési tényezője (W) közel állandó.

Ezzel az egyenletek is lényegesen egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} r &= r_0 W^{(\Theta/2\pi)} \\ z &= z_0 W^{(\Theta/2\pi)} \end{aligned} \quad (4)$$

A továbbiakban megkísérlek a fenti paraméterek függvényében megadni néhány morfológiai sajátsgot, a vezérvonal alakjának pontos megszabása nélkül. C (r_c , z_c , Θ_c)-vel a továbbiakban az általánosság kedvéért a vezérvonal területének súlypontját jelöljük.

A vázak **irányítása**. A (többséget alkotó) jobbra csavarodó csigákat jobboldali, a balra csavarodókat általában baloldalon elhelyezkedő szájnnyílással, vagyis felfelé álló apexszel szokás ábrázolni. Thompson javaslata szerint mindet jobboldali szájnnyílással kellene bemutatni, mert nem a csavarodás, hanem a tengely menti eltolás irányában különböznek.

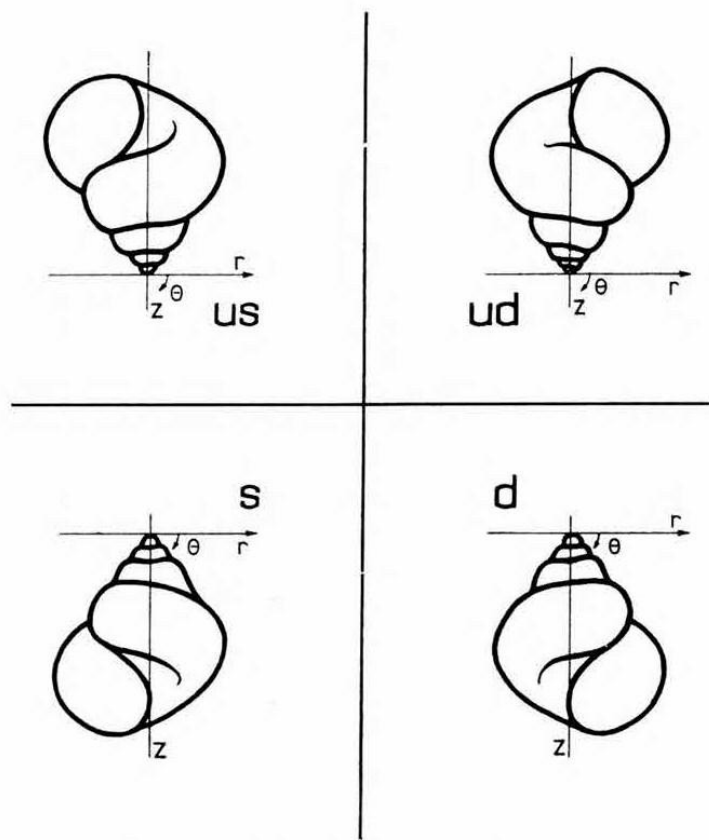
A Treatise on Invertebrate Paleontology felfogása szerint a felcsavarodásnak négyféle módja lehet: a lágyszervek torziójával azonos módon, vagy ellenkezőleg is fordulhat a ház. Az utóbbi esetet hyperstrophianak nevezik (Cox, L. R. 1960) (1. táblázat).

1. táblázat.

A ház feltekeredési típusai

	Lágy szervek elhelyezkedése	
	sinistralis	dextralis
Hyperstrophia	ultrasinistralis	ultradextralis
Isostrophia	planispiralis	
Orthostrophia	sinistralis	dextralis

Ha megállapítható a lágy szervek irányítottsága, a szájnnyílást a lágy szervek elhelyezkedése szerint célszerű jobb vagy baloldalon elhelyezni (vagyis a forgásirányt a lágy szervek elhelyezkedéséhez szabjuk), a hyperstrophicus alakokat lefelé fordult spirálal kell ábrázolni (2. ábra).



2. ábra. A házfejlesztés különböző módjai.

Jelölések: d= dextralis, s = sinistralis,
ud = ultradextralis, us = ultrasinistralis

„Normális” iránynak a jobboldalit tekintve, a teljesen szimmetrikus vázakat is jobbra forgónak ábrázoljuk. A dextralis, orthostrophicus alakok túlsúlya mellett a vezérvonal súlypontja többnyire a $z_c \geq 0$ tartományba esik. (Szimmetrikus vázakra $z_c = 0$.)

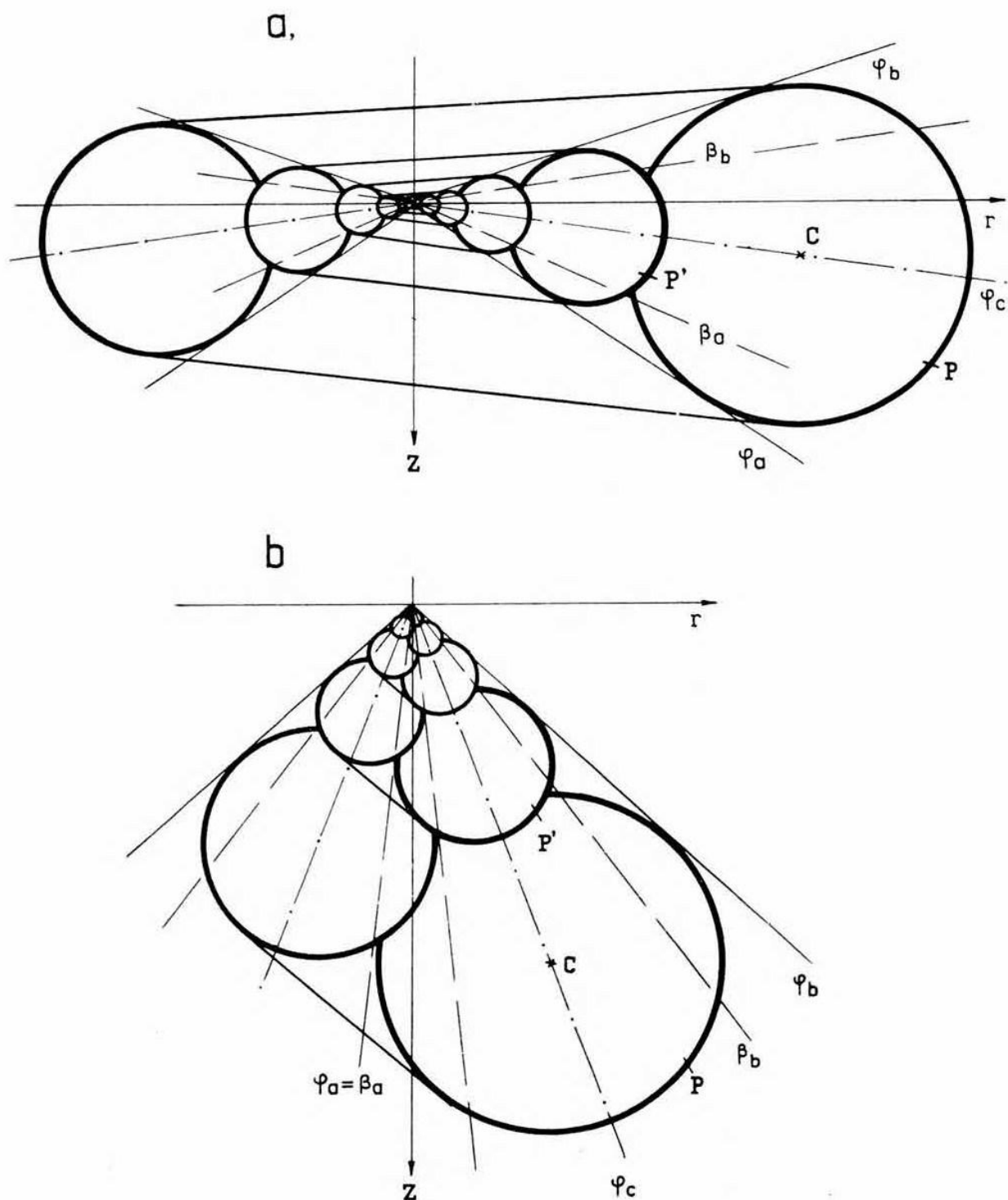
Kúpszög és köldök. A vezérvonal általában nem öleli körül a pólust. Ha mégis ez történne, akkor az utolsó félkanyarulat a váz egészét magában foglalná, a lágy test körülölelné a vázat. Ettől az esettől eltekintve meghatározhatók r , z és $\phi = \arctg r/z$ értelmezési tartományának felső és alsó korlátai (r_a, r_b, ϕ_a, ϕ_b).

Feltételezve a dextralis orthostrophicus elhelyezkedést, ϕ_a és ϕ_b közrefogják ϕ_c -t. Ha a vezérvonal átnyúlik a tengelyen a $\Theta - \pi$ félsíkba, ezt a részt tekintsük negatív r értékűnek. így $r_a = r_{min}$ negatív is lehet.

Ha $r_a > 0$, ϕ_a és ϕ_b a váz mérhető, valóságos kúpszögei. Ha $r_a = 0$, akkor a kanyarulat legalább egy oldalon érintkezik a tengellyel és columellát (oszlopot) alkot, ϕ legalább egyik szélsőértéke $0 \pm \pi$. Köldöknek nevezzük azt a konkáv kúpfelületet, mely a kanyarulatokat

$$0^\circ < \phi_a \text{ ill. } (180^\circ - \phi_b) < 90^\circ \quad (5)$$

esetben belülről érinti, ahol $\phi_a < \phi_c < \phi_b$.



3. ábra. Példák a vezérvonal különböző elhelyezkedésére

Magyarázat: ϕ_a, ϕ_b kúpszögek, β_a, β_b varratvonalsszögek, $P (r_0, z_0)$ a varratvonal egy általános pontja, $P' (r_0W, z_0W)$ P képe egy kanyarulattal előbb, C a vezérvonal súlypontja; a) involut (uU) típus, $\phi_a = 55^\circ, \beta_a = 66^\circ, \phi_c = 82^\circ, \beta_b = 98^\circ, \phi_b = 109^\circ$; b) aK típus, $\phi_a = \beta_a = -6^\circ, \phi_c = 21^\circ, \beta_b = 38^\circ, \phi_b = 48^\circ$

2. táblázat

A ház alakváltozatai a kúpszögek értéke szerint

	ϕ_b értéke			
	$<90^\circ$	$90-180^\circ$	180°	$>180^\circ$
$\phi_a > 0^\circ$	uK	uU	uC	uA
$\phi_a = 0^\circ$	cK	cU	cC	cA
$\phi_a < 0^\circ$	aK	aU	aC	aA

Magyarázat: kisbetűk ϕ_a , nagybetűk ϕ_b oldalára utalnak: u = köldök, k = konvex, kívülről érintő kúp, c = columella, a = teljes átfedés.

A ϕ_a és ϕ_b különböző értékeihez tartozó változatokat a 2. táblázat tartalmazza.

Varratvonalnak nevezzük a kanyarulatok érintkezésének kívülről látható vonalát. Az érintkezés — és a varrat vonal — létrejöttének feltétele, hogy az

$$z(r) = z(r) W \quad (6)$$

$$z(r) = z(-r) W^{1/2} \quad (7)$$

egyenletek valamelyikének legyen megoldása.

A két egyenlet megoldásai közül legfeljebb kettő lehet varrat vonal, mert amennyiben van legalább két megoldás, a vezérvonal által határolt terület, a megelőző kanyarulatok metszetei és a külső tér egy-egy összefüggő síktartományt alkot, s ezeknek csak két közös pontja lehet. Ezért az esetleges több megoldás közül csak a két szélső (ϕ_c -hez viszonyítva legnagyobb, ill. legkisebb) lesz varratvonal. Ezek szögét jelöljük β_a -val, ill. β_b -vel (3. ábra).

Ezek a varratvonalak eredhetnek különböző egyenletekből, de lehetnek ugyanannak a megoldásai is. A (7) egyenletnek természetesen csak $r_a \leq 0$ esetén lehet megoldása.

A (6) egyenletből adódó megoldás pozitív, teljes terjedelmében látható és a két határos vázrész fáziskülönbsége egy teljes kanyarulat. A (7) egyenletből adódó megoldás negatív β értékű, csak a legutolsó félkanyarulaton figyelhető meg és fáziskülönbsége fél kanyarulat.

Az $r = 0$ megoldás mindkét egyenletre közös, columellát, az $r = z = 0$ triviális megoldás pedig egyetlen pontot (itt a pólus valamennyi kanyarulat közös pontja) eredményez.

Elvileg a megoldások következő kombinációi lehetségesek:

(+) (++) (+c) (c-b) (cc) (c-) (-c) (cp) (pc) (+p) (p+) (p) (p-) (-p) (+-) (-+) (-) (--)
 (+ pozitív, - negatív varratvonal, c columella, p pólus),
 vagyis összesen 18 (ebből 6 szimmetrikus). Megjegyzendő, hogy negatív megoldások a természetben nem ismeretesek.

Egyes gyakori kúpszög, ill. varratvonal kombinációknak saját elnevezése van:

anomphalus = nincs köldök, $\phi_a \leq 0$

phaneromphalus = nagy a köldök, $\phi_a \gg 0$

conispiral = $\phi_b < 90^\circ$

planispiral = $\phi_b > 90^\circ$

evolut = nincs varratvonal [sem (6)-nak, sem (7)-nek nincs megoldása]

involut = uU/ ++ típus (két köldök, két varratvonal)

convolut = cC, cA, aC, aA valamelyike (gyakorlatilag a legelső, cc varratvonaltípussal).

A periodikus díszítmények leírásához a vezérvonalat megadó egyenletet Θ periodikus függvényeként kell felállítani, ill. a folyamatos logaritmikus spirális helyett diszkrét gnomónikus sorozatokra kell áttérni. Különösen a kamrázott ősmaradványok leírásához jelenthet utóbbi lényeges segítséget.

A váz méreteinek leírásakor célszerű a vezérvonalat, mint a szájnnyílás (legutolsó növekedési vonal) alakját megadni, feltéve, hogy ez megfelel az (előző) kanyarulatok növedékvonalainak, vagyis nem következtek be felnőttkori módosulások a köpeny vonalában.

Ekkor a szokásos jellemzők [definíciók Cox, L. R. 1960. szerint (4. ábra)] összefüggése a fentebb bemutatott paraméterekkel:

teljes magasság: a függőleges tengelyű váz legmagasabb és legalacsonyabb pontjának távolsága:

$$H_{\max} = \max (H_a, H_t) \quad (8)$$

ahol H_a az apertúramagasság,

$H_t = z_{0\max}$ a pólustól számított legnagyobb z távolság (a spiramagasság és az apertúramagasság összege)

apertúramagasság: a szájnnyílás magassága

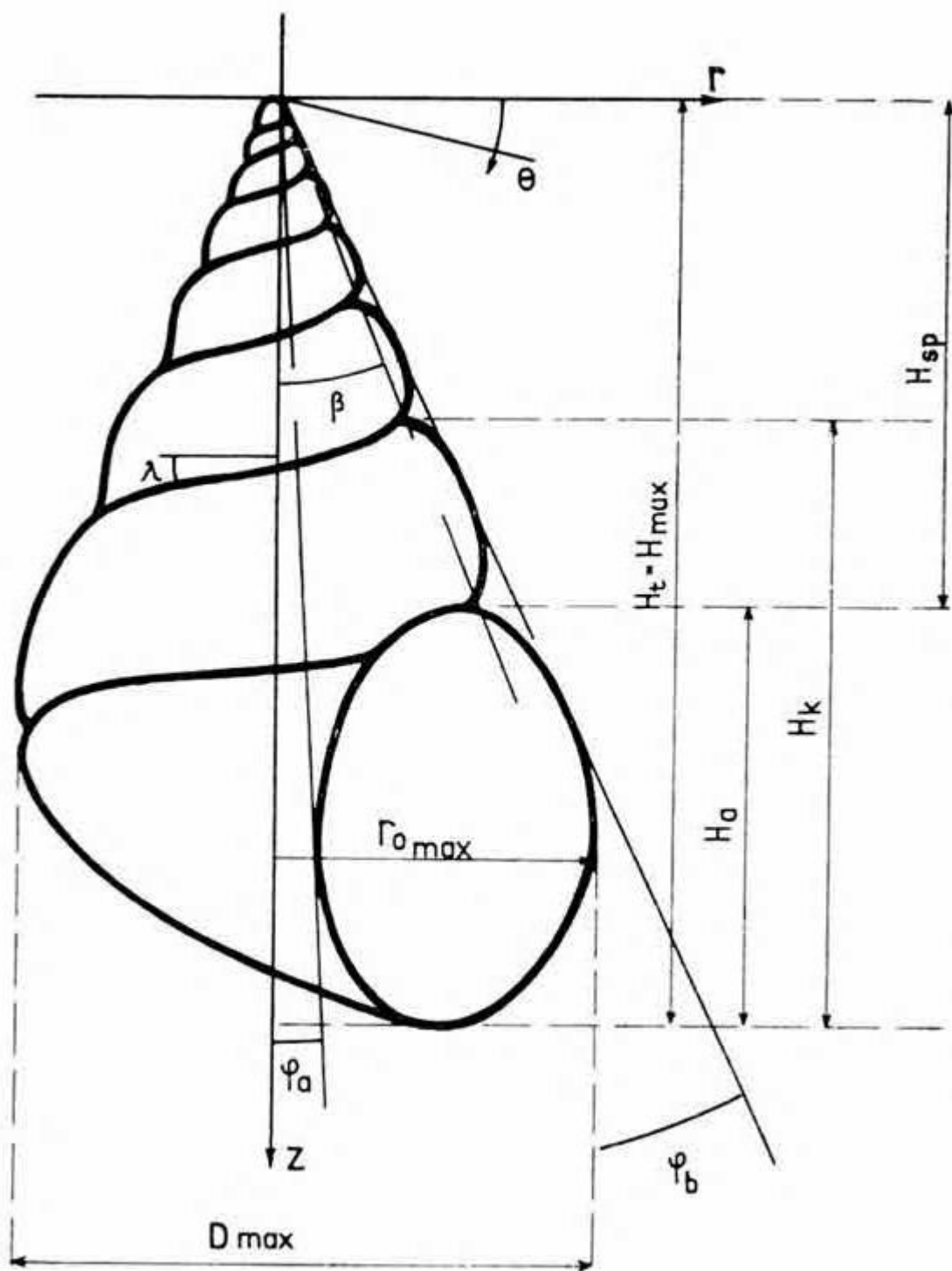
$$H_a = z_{0\max} - z_{0\min} \quad (9)$$

spíramagasság (spíra csak akkor van, ha a váz kívülről kúppal burkolható, a matematikailag még értelmezhető $z_{0\min} < 0$ esetben a paleontológus nem beszél spíráról) :

$$H_{sp} = z_{0\min} \quad (10)$$

kanyarulatmagasság:

$$H_k = z_{0\max} - z_{0\min}/W \quad (11)$$



4. ábra. A csigaház méretei

Szögjellemzők : ϕ_a köldökszög, ϕ_b spiraszög, β varratvonalszög, λ kanyarulatlejtő. Lineáris méretek : $H_{\max}$ magasság, $H_t = z_{0\max}$ apextől mért magasság, H_{sp} spiramagasság, H_k utolsó kanyarulat magassága, H_a apertúramagasság, $D_{\max}$ maximális átmérő, $r_{0\max}$ maximális sugár.

Koordináták: r , z , Θ .

Legnagyobb szélesség: a tengelyre merőleges legnagyobb távolság

$$D_{max} = r_{0max} (1 + 1/\sqrt{W}) \quad (12)$$

A ház *kanyarulatainak lejtője* (λ), a varratvonalat burkoló kúp mentén mért α loxodróma-szög (az alkotó és a varrat vonal szöge), valamint β varratvonalszög és W összefüggései:

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \ln W / 2 \pi (\cos \beta / \sin^2 \beta) \quad (13)$$

$$\ln W = \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha \quad (14)$$

A fenti hosszúság-, illetve szögjellemzők mellett meg kellene adni a W kanyarulatunkénti növekedési tényező értékét is:

$$W = a_n / a_{n+1}$$

ahol a_n és a_{n+1} két egymásutáni kanyarulat valamely lineáris mérete (pl. magasság a varratvonalak között, vagy maximális átmérő stb.).

A szögértékek, ill. a növekedési tényező megadása annál is fontosabb, mert ezek sokkal jellemzőbb faji bélyegek, mint a lineáris méretek (ugyanis általában nem változnak a növekedés folyamán) (Torre, D. 1965).

A fentebb vázolt problémák sok tekintetben, különösen a növekedésvonalak alakjának leírása terén még további statisztikai vizsgálatokat igényelnek, annyi azonban bizonyos, hogy számos minőségi jellemzőnek lehet konkrét geometriai értelmet tulajdonítani, s számszerűen is meg lehet adni őket.

IRODALOM

Burnaby, T. P. 1966: Allometric growth of ammonoid shells: a generalization of the logarithmic spiral. — *Nature (Engl.)* 209. No. 5026. pp. 904—906.

Cox, L. R. 1960: Gastropoda. in: Moore, R. C. ed: *Treatise on Invertebrate Paleontology. Part II: Mollusca I.* — Lawrence, 23+251 p.

Grabau, A. H. 1872: Über die Naumann'sche Conchospirale und ihre Bedeutung für die Conchiliometrie. — *Univ. Leipzig, Inaugural diss.*, 77 p.

Grandi, G. 1701: *Demonstratio theorematum Hugenianorum circa . . . logarithmicam lineam.*

Leslie, J. 1822: *Geometry of Curved Lines.* — p. 378.

Moseley, H. 1838: On the geometrical forms of turbinated and discoid shells. — *Philos. Trans. Royal Soc.* 128. pp. 351 — 370.

Naumann, C. F. 1845: Ueber die wahre Spirale der Ammoniten. — *Ann. Phys. Chemie* 64. (2. R., 140) No. 4. pp. 538 — 543.

Obata, J. 1960: Spirale de quelques Ammonites. — *Mém. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. D. Geol.* 9. No. 3. pp. 151 — 165.

Raup, D. M. 1961: The geometry of coiling in gastropods. — *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.* 47. No. 4. pp. 602-609.

Raup, D. M. 1966: Geometric analysis of shell coiling: general Problems. — *J. Paleont.* 40. pp. 1178-1190.

Thompson, D'A . W . 1963: On growth and form. — *Cambridge, I I.*: pp. 748—911.

Torre, D. 1965: On the use of linear measurements in multivariate analysis applied to taxonomy. — Riv. Ital. Paleont. 71. No. 4. pp. 1271-1273.

Vasicek, Z. 1967: A contribution to the solution of the Ammonite spiral. — Sbornik ved. prac. Vys. skoly banské v Ostrave, 13. No. 1. pp. 107—113.

Wallis, J. 1659: Tractatus duo, de Cycloide, . . . &c. — Oxon., pp. 107 — 108.

(*Magy. Áll. Földt. Int. Évi Jel.*, 1968 (1971), p.379-389)